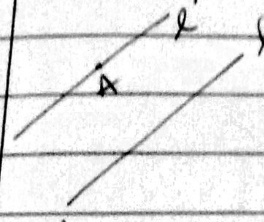
"Ευκλείδεια ή μη Ευκλείδεια"

▶ **Βασικά Αξιώματα**

1 Αξιώματα Θέσης — Ευκλ. Γεωμ.: 1-4 αξιώματα & 5_0
2 " Διάταξης
3 " Ισότητας
4 " Συνέχειας
5_0 " Παραλληλίας

5_0 αίτημα Αξίωμα Παραλληλίας

Αν ευθεία l, το σημείο $A \notin l$, τότε $\exists$ μοναδική ευθεία l', $A \in l'$.



● **Πρόταση** (που ισχύει στην Ευκλ. Γ.)

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι $180°$

▶ **Υπερβολική Γ.**

1-4 αξιώματα & $5_0'$

$5_0'$] Από κάθε σημείο A, εκτός ευθείας l διέρχονται τουλάχιστον 2 παράλληλες ευθείες

● **Αξιώματα Θέσης**

Θ1. Από δύο σημεία A, B διέρχεται μία και μόνο ευθεία

E επίπεδο

1) $x \in E \leftrightarrow x$ σημείο

2) κάποια συγκεκριμένα $\subset E$, τα ονομάζουμε ευθείες

Θ2. Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον 2 σημεία (διαφορετικά)

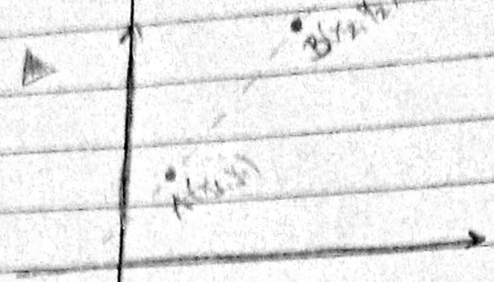
Θ3. $\exists$ 3 διαφορετικά μη ~~...~~ συνευθειακά σημεία

Μοντέλο

→ Για $E = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$, σημείο $P(x,y)$

ευθείες: $\{(x,y) \in E = \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$, όπου α, β, γ $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$

$P(x,y) \subset E$: $\alpha x + \beta y + \gamma \neq 0 \Rightarrow P(x,y) \notin l$



θ.α.ο υπάρχει ευθεία l ή μοναδική

α) Έστω l ευθεία, $A,B \in l$

$$\lambda = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Προσπαθούμε να προσδιορίσουμε μια ευθεία που διέρχεται από τα A & B. Χρησιμοποιούμε την Αναλυτική Γεωμ.

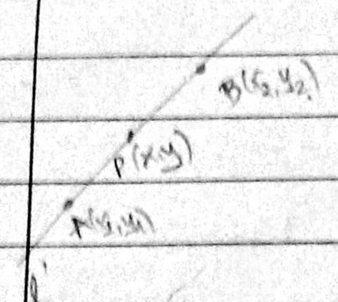
• Ορίζουμε μια ευθεία l: $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \lambda = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$x_1 \neq x_2$

$\Leftrightarrow y-y_1 = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ "ευθεία" (Προφανώς $A,B \in l$)

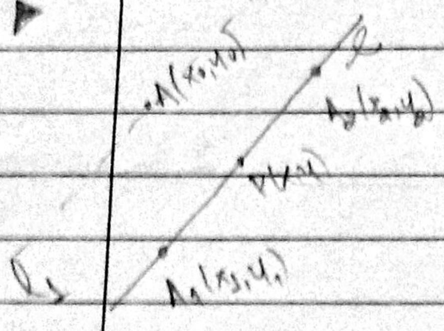
Ν.α.ο μοναδική:

Έστω l' ευθεία, A,B $(A \neq B)$ $A,B \in l'$ ή τυχαίο σημείο $P(x,y) \in l' \Leftrightarrow$



$\lambda_{AP} = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow (x,y) \in l$

Άρα $\boxed{l' = l}$



$A \notin l$

θ.α.ο $\exists$ μοναδική παράλληλη ευθεία l, που διέρχεται από το A

$\exists$ 2 σημεία να ανήκουν στην ευθεία l

$$\lambda = \lambda_l = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1 = \lambda(x-x_1)$$

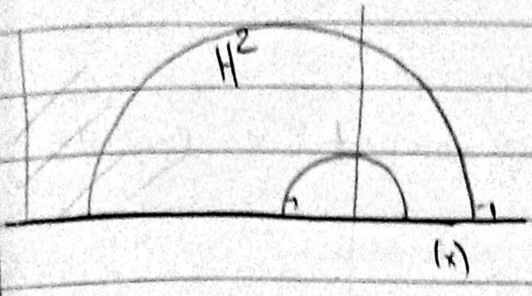
Ορίζω την ευθεία $y-y_0 = \lambda(x-x_0)$ (l_1)

Α $l_1 \parallel l$ $(l \cap l_1 \neq \emptyset)$

$\exists (x,y) \in l$, αλλά και $(x,y) \in l_1$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y-y_0 = \lambda(x-x_0) \\ y-y_1 = \lambda(x-x_1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y-\lambda x = y_0-\lambda x_0 \\ y-\lambda x = y_1-\lambda x_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_0-\lambda x_0 = y_1-\lambda x_1$$

⇒ $y_1 - y_0 = \lambda(x_1 - x_0)$ ⇒ $A(x_0,y_0) \notin l$ Άτοπο

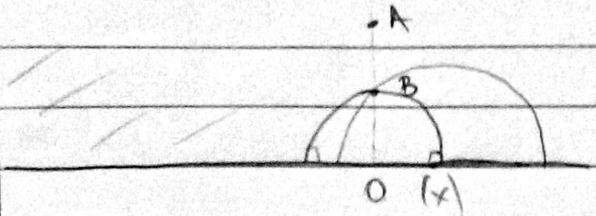


$E: H^2 = \{(x,y) : y>0\}$

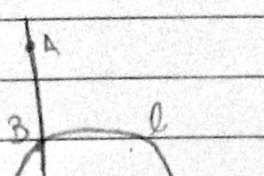
H^2: υπερβολικό επίπεδο

● "ευθεία" στο υπερβολικό επίπεδο
α) Οι κάθετες στον άξονα-x
β) Τα άνω ημικύκλια με κέντρο τον άξονα-x, άρα τέμνει κάθετα τον άξονα x

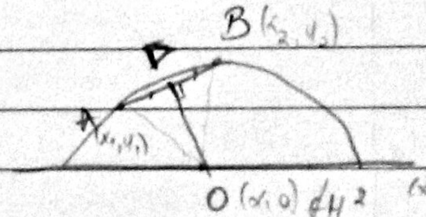
Πρ.1 Από 2 διακεκριμένα σημεία $A,B \in H^2$ ($A \neq B$) διέρχεται μοναδική ευθεία.



1η) $AB \perp (x)$
2η) A,B, ($A \neq B$) $AB \not\perp (x)$ l
Ψάχνουμε να βρούμε μια "ευθεία" (δηλ. ευθεία του υπερβ. επιπέδου) μοναδική ώστε $A,B \in l$



{ Δεν υπάρχει ευθεία (ημικύκλιο) που να περνά από A & B ταυτόχρονα

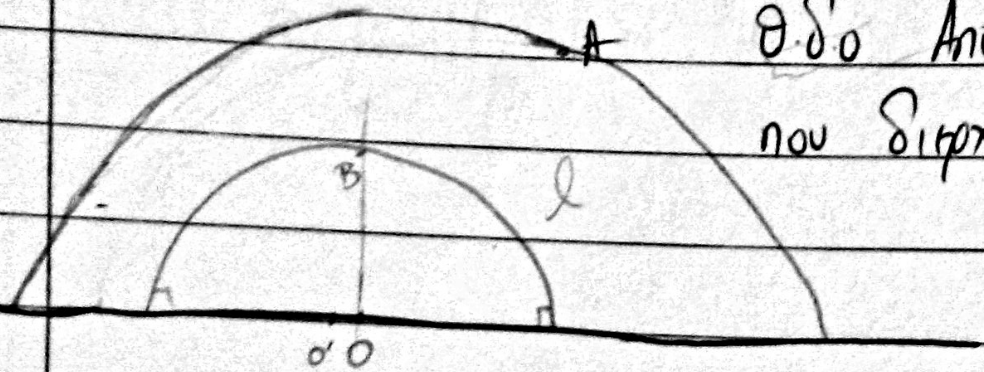


με $\Delta\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ {φέρνουμε τη μεσοκάθετο του AB}
Άρα OA = OB (διαγράφω το ημικύκλιο με κέντρο O & ακτίνα OA = OB
Ονομάζω αυτό το ημικύκλιο l και έχω ότι το l "ευθεία" & $A,B \in l$

(Μοναδικότητα) Αν l' τυχαία "ευθεία" που διέρχεται από τα A,B με κέντρο στον άξονα x, το σημείο O', θέλουμε ν.δ.ο. $l = l'$
$l: A,B \in l' \Rightarrow O'A = O'B = r'$

$\Rightarrow O'A = O'B \Rightarrow O'$ ανήκει στη μεσοκάθετο του $AB \Rightarrow O' = O \Rightarrow l' = l$

- **Αξίωμα Παραλληλίας**



Θ.δ.ο. Από σημείο $A \notin l$, $\exists$ τουλάχιστον 2 "ευθείες" που διέρχονται από το A κι είναι παράλληλες στη l